

POUR

Licence



AVANT-PROPOS

Cet ouvrage propose de réaliser des activités portant sur des notions d'algèbre étudiées pendant vos années de licence universitaire en sciences économiques et de gestion. Certains éléments seront approfondis et également mobilisés dans des applications économiques pour comprendre la finalité d'un tel apprentissage scientifique.

Ce livre est inspiré d'un cours donné dans la licence des Sciences des Organisations à l'université de Paris Dauphine. Il a été conçu par Suzel Roverato, Dominique Pujal et Geneviève Pons.

Les connaissances mathématiques sont nécessaires pour modéliser des problèmes scientifiques et économiques afin d'apporter les preuves des résultats annoncés qui peuvent se révéler contre-intuitifs par rapport à une analyse factuelle (intuitive).

Bien que cet ouvrage propose des applications ainsi que des exercices mathématiques et économiques pour appliquer et consolider les connaissances mathématiques, il n'en reste pas moins que cet ouvrage reste un ouvrage de mathématiques dans lequel les éléments de cours sont développés sans, nécessairement, être démontrés. Il est scindé en deux parties. Les neufs premiers chapitres présentent les outils mathématiques qui définissent les notions de base nécessaires à tout apprentissage de l'algèbre dans l'enseignement supérieur. Le dernier chapitre traite d'applications et présente la résolution de problèmes complexes (ce qui ne veut pas dire difficile !) exploitant des résultats d'algèbre.

Les activités de ce livre sont découpées pour respecter trois grands piliers de l'apprentissage. L'application immédiate de chaque chapitre succédant aux rappels de cours permet l'**engagement actif** de l'apprenant car comprendre nécessite de le mobiliser. Les exercices mathématiques et les applications économiques de chaque chapitre procurent à l'apprenant un **retour d'apprentissage** qui donne lieu à la correction des erreurs de prédiction. Les problèmes mathématiques et économiques corrigés qui finissent chaque partie valident la **consolidation des acquis** pour que s'effectue l'étape d'automatisation de l'application d'une notion mathématique.

Comme dans tout enseignement, la réalisation d'activités permet d'assimiler les connaissances. Pour que ce travail d'accompagnement et d'approfondissement soit bénéfique, il est nécessaire de commencer à réaliser les activités sans consulter la correction. Vous pouvez néanmoins consulter la correction détaillée pendant l'activité pour dépasser un blocage ou remédier à une erreur de raisonnement.

Accessible à tous, ce manuel propose plusieurs portes d'entrée. Ainsi, les étudiants avec des compétences mathématiques solides pourront approfondir leurs connaissances avec les problèmes corrigés, tandis que les étudiants « plus littéraires » pourront se familiariser avec la formalisation grâce aux applications économiques. Néanmoins, une lecture soutenue du cours est recommandée pour rendre le travail de l'apprenant efficace.

Ce manuel s'adresse à tout apprenant souhaitant comprendre les mathématiques sans oublier que les mathématiques ne sont qu'un outil pour résoudre des problèmes scientifiques ou économiques. Il a été conçu pour les étudiants inscrits en Licence d'études de sciences économiques et de gestion ou en classes préparatoires filière Économique et Commerciale Générale (ECG).

L'ESPACE VECTORIEL $\mathbb{R}^N$

1. Définitions

Définition 1.1

Un élément de $\mathbb{R}^n$ est une liste ordonnée de n nombre réels appelé n -uplet. Un tel n -uplet est appelé vecteur et est écrit en colonne

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

où $x_i \in \mathbb{R}$ pour tout $1 \leq i \leq n$, x_i s'appelle la i^{ieme} composante de x .
On note $\vec{0}$ le vecteur nul dont toutes les composantes sont nulles.
Un nombre réel est appelé scalaire pour le distinguer des vecteurs.

Exemple 1.2. — $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^4$.

Proposition 1.3 – Egalités de deux vecteurs

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si toutes les composantes sont égales.

$$\vec{x} = \vec{y} \iff \forall 1 \leq i \leq n, \quad x_i = y_i.$$

Remarque 1.4. — L'ordre des composantes est important, ainsi $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Définition 1.5 – Opérations dans $\mathbb{R}^n$

Soit deux vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et a un réel

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \text{ et } a\vec{x} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}$$

Exemple 1.6. — $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Remarque 1.7. — On note $-\vec{x}$ le vecteur $(-1)\vec{x}$

Proposition 1.8

— Propriétés de l'addition

Pour tous vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$

— $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$,

— $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$,

— $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$,

— $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$.

— Propriétés du produit par un scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et tous réels λ et μ

— $\lambda(\mu\vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x} = \mu(\lambda\vec{x})$,

— $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$,

— $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$,

— $1\vec{x} = \vec{x}$, $0\vec{x} = \vec{0}$ et $\lambda\vec{0} = \vec{0}$.

Ces propriétés font de l'ensemble $\mathbb{R}^n$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Représentation graphique dans $\mathbb{R}^2$ On considère les vecteurs $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

et $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On dit que la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé, on associe le vecteur $\vec{e}_1$ à l'axe horizontal et le vecteur $\vec{e}_2$ à l'axe vertical. Tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ s'écrit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2.$$

A tout vecteur $\vec{x}$ on associe le point M du plan où x_1 est l'abscisse de M et x_2 l'ordonnée de M . Alors le vecteur $\vec{x}$ est représenté par le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

En choisissant de représenter tous les couples de $\mathbb{R}^2$ par des vecteurs d'origine O , les opérations définies dans le paragraphe précédent se représentent géométriquement

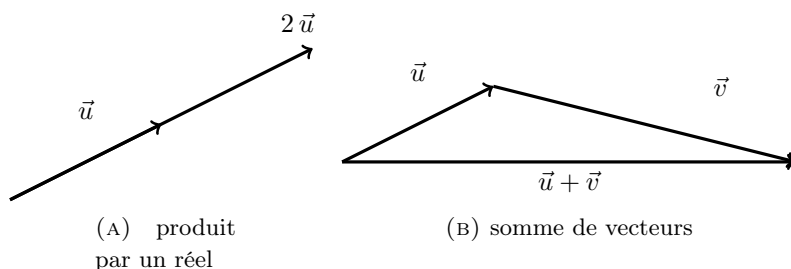


FIGURE 1.

2. Combinaison linéaire de vecteurs

Définition 1.9 – Combinaison linéaire

On considère p vecteurs $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p$ de $\mathbb{R}^n$. On appelle combinaison linéaire de ces p vecteurs tout vecteur de la forme

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_p \vec{x}_p$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des réels appelés coefficients de la combinaison linéaire.

Remarque 1.10. — On peut toujours écrire le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ comme une combinaison de p vecteurs quelconques où les coefficients sont tous nuls.

Exemple 1.11. — Dans $\mathbb{R}^4$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{y} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors

$$\vec{v} = 2\vec{x} - 3\vec{y} = \begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ est une combinaison linéaire de } \vec{x} \text{ et de } \vec{y}.$$

Définition 1.12 – Famille de vecteurs

Une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une liste ordonnée de p vecteurs $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p$ de $\mathbb{R}^n$ notée $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$.

Exemple 1.13. — L'ordre des vecteurs est important et un même vecteur peut être répété plusieurs fois. Ainsi les familles $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ sont différentes, $(\vec{u}, \vec{u}, \vec{w})$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ où $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec $\vec{u} \neq \vec{v}$.

Proposition 1.14 – Base canonique de $\mathbb{R}^n$

Soit les n vecteurs $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout entier $1 \leq i \leq n$, $\vec{e}_i$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la i ème qui vaut 1.

On dit que la famille $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ est combinaison linéaire des vecteurs de la base canonique.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i.$$

Exemple 1.15. — On cherche à quelle condition un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$

est combinaison linéaire de $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et de $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Solution : $\vec{v}$ est combinaison linéaire de $\vec{v}_1$ et de $\vec{v}_2$ si et seulement s'il existe des réels a et b tels que

$$\vec{v} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2$$

Cette égalité de vecteurs se traduit par l'égalité des coordonnées d'où le système d'inconnues a et b :

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = -a - b \end{cases} \iff \begin{cases} a = x \\ b = y \\ z = -x - y \end{cases} \iff \begin{cases} a = x \\ b = y \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Ce système n'est possible que si $x + y + z = 0$ et si cette condition est réalisée alors $\vec{v} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2$.

Par conséquent, un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de $\vec{v}_1$ et de $\vec{v}_2$ si et seulement si $x + y + z = 0$.

Ainsi, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de $\vec{v}_1$ et de $\vec{v}_2$ car $1 - 2 + 1 = 0$ et

$\vec{u} = \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$. Par contre $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire de $\vec{v}_1$ et de $\vec{v}_2$ car $1 + 2 - 1 \neq 0$.

3. Sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.16

Soit F une partie de $\mathbb{R}^n$, on dit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si

- F est non vide,
- $\forall \vec{x} \in F, \forall \vec{y} \in F, \forall a \in \mathbb{R}, \vec{x} + a\vec{y} \in F$.

Proposition 1.17

Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors $\vec{0} \in F$.

Démonstration. — Puisque F est un sous-espace vectoriel, cet ensemble est non vide, soit $\vec{x}$ un élément de F . On applique la deuxième propriété avec $a = -1$ et $\vec{y} = \vec{x}$ d'où $\vec{x} - \vec{x} \in F$ donc $\vec{0} \in F$. $\square$

Remarque 1.18. — Ainsi une condition nécessaire pour que F soit un sous-espace vectoriel est que le vecteur nul $\vec{0}$ soit dans F .

Exemple 1.19. — L'ensemble $\{\vec{0}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ ainsi que $\mathbb{R}^n$. En effet, ces deux ensembles sont des ensembles de $\mathbb{R}^n$, non vides et stables par combinaison linéaire.

Exemple 1.20. — $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, 2x + 3y = 2 \right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet, le vecteur nul n'est pas dans E , puisque $2 \times 0 + 3 \times 0 = 0$ et $0 \neq 2$.

Exemple 1.21. — $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, 2x + 3y = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet, le vecteur nul est dans G , car $2 \times 0 + 3 \times 0 = 0$. Ainsi G est non vide. De plus, soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de G et soit a un réel, on a

$$\vec{u} + a\vec{u}' = \begin{pmatrix} x + ax' \\ y + ay' \end{pmatrix}.$$

Or, on a

$$2(x + ax') + 3(y + ay') = (2x + 3y) + a(2x' + 3y') = 0 + a \times 0 = 0.$$

On en conclut que $\vec{u} + a\vec{u}'$ est un vecteur de G .

Exemple 1.22. — $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, y = x^2 \right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet, le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est dans F mais $2\vec{u}$ n'est pas dans F puisque $2 \neq 2^2$.

Remarque 1.23. — Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors toute combinaison linéaire de vecteurs de F est un vecteur de F . On dit que F est stable par combinaison linéaire.

Définition 1.24

Soit $\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On note $\text{Vect}(\mathcal{U})$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $\mathcal{U}$:

$$\vec{x} \in \text{Vect}(\mathcal{U}) \iff \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \vec{x} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p.$$

Exemple 1.25. — On a $\text{Vect}(\vec{0}) = \{\vec{0}\}$.

Exemple 1.26. — Soit $D_1 = \text{Vect}(\vec{e}_1)$ où $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\vec{x} \in \text{Vect}(\vec{e}_1) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{x} = \lambda \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Graphiquement D_1 est la droite vectorielle correspondant à l'axe des abscisses.

Exemple 1.27. — On a $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. En effet, soit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ où $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$$

donc $\vec{x}$ est un vecteur de $\text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Ainsi, $\mathbb{R}^2$ est inclus dans $\text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. L'inclusion réciproque vient de la définition de $\text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on en déduit l'égalité $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Proposition 1.28

Soit $\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

$\text{Vect}(\mathcal{U})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. — Comme $\vec{0} = 0\vec{u}_1 + \dots + 0\vec{u}_p$, on a $\vec{0} \in \text{Vect}(\mathcal{U})$ et donc $\text{Vect}(\mathcal{U})$ est non vide. De plus, soit $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de $\text{Vect}(\mathcal{U})$, il existe $2p$ réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et $\mu_1, \dots, \mu_p$ tels que

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p \quad \text{et} \quad \vec{y} = \mu_1 \vec{u}_1 + \dots + \mu_p \vec{u}_p$$

Soit a un réel

$$\vec{x} + a\vec{y} = (\lambda_1 + a\mu_1)\vec{u}_1 + \dots + (\lambda_p + a\mu_p)\vec{u}_p.$$

Ainsi, $\vec{x} + a\vec{y}$ est un vecteur de $\text{Vect}(\mathcal{U})$. Par conséquent, $\text{Vect}(\mathcal{U})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. $\square$

Remarque 1.29. — Cette propriété est utilisée pour prouver qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Par exemple, on considère l'ensemble

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a+c \\ b-a \\ c-b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \text{ où } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \right\}$$

donc

$$\vec{x} \in F \iff \exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \vec{x} = \begin{pmatrix} a+c \\ b-a \\ c-b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit qu'un vecteur $\vec{x}$ appartient à F si et seulement si $\vec{x}$ est combinaison linéaire de $\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{g}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc

$$F = \text{Vect}(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3).$$

Par conséquent, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 1.30 – Intersection

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. — Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels, le vecteur nul $\vec{0}$ est dans F et dans G , donc dans l'intersection $F \cap G$. Ainsi, $F \cap G$ est non vide. Soit $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de $F \cap G$ et a un réel. Donc, $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont deux vecteurs de F et comme F est un sous-espace vectoriel, $\vec{x} + a\vec{y}$ est un vecteur de F . De même, $\vec{x} + a\vec{y}$ est un vecteur de G . Par conséquent, $\vec{x} + a\vec{y}$ est un vecteur de $F \cap G$. $\square$

4. Propriétés des familles de vecteurs

Soit $\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On considère le sous-espace vectoriel $\text{Vect}[\mathcal{U}]$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $\mathcal{U}$. Si l'un des vecteurs de cette famille est combinaison linéaire des autres, par exemple si l'on a

$$\vec{u}_p = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_{p-1} \vec{u}_{p-1},$$

alors toute combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{p-1}$. Ainsi, le sous-espace $\text{Vect}[(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)]$ est aussi $\text{Vect}[(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{p-1})]$

$$\text{Vect}[(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)] = \text{Vect}[(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{p-1})].$$

Cela signifie que le vecteur $\vec{u}_p$ est redondant.

De manière générale, une famille qui possède des vecteurs combinaisons linéaires des autres sera appelée famille liée. Par contre, si aucun des vecteurs de la famille n'est combinaison linéaire des autres, alors on dira que la famille est libre. Ainsi, pour une famille libre, il n'est pas possible d'enlever un vecteur de cette famille sans modifier le sous-espace générée par cette famille.

Pour montrer qu'une famille est libre, on utilisera un test appelé test de liberté qui servira de définition d'une famille libre.

4.1. Familles libres. —

Définition 1.31

Soit $\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On dit que la famille $\mathcal{U}$ est libre si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p = \vec{0} \iff \forall 1 \leq i \leq p, \quad \lambda_i = 0.$$

Si la famille n'est pas libre, on dit qu'elle est liée. Dans ce cas, il existe p réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non tous nuls tel que $\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p = \vec{0}$. Cette équation est appelée équation de liaison.

Exemple 1.32. — Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, alors $(\vec{u})$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$. En effet pour tout réel a , l'égalité $a\vec{u} = \vec{0}$ entraîne $a = 0$ car $\vec{u}$ est non nul.

Exemple 1.33. — Toute famille $\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ de $\mathbb{R}^n$ contenant le vecteur nul est liée. En effet supposons que $\vec{u}_p = \vec{0}$ alors

$$0\vec{u}_1 + \dots + 0\vec{u}_{p-1} + 1\vec{u}_p = \vec{0}.$$

Il y a donc une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathcal{U}$ qui est nulle avec des coefficients non tous nuls.

Définition 1.34

On dit que deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de $\mathbb{R}^n$ sont colinéaires s'il existe un réel a tel que $\vec{x} = a\vec{y}$ ou $\vec{y} = a\vec{x}$.

Proposition 1.35

$(\vec{u}, \vec{v})$ est libre si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

Démonstration. — On démontre que $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. En effet, si $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée, il existe deux réels a et b dont l'un est non nul tel que $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$. Si a est non nul alors $\vec{u} = -\frac{b}{a}\vec{v}$ et si b est non nul alors $\vec{v} = -\frac{a}{b}\vec{u}$, dans les deux cas les vecteurs sont colinéaires. Réciproquement, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors il existe un réel a tel que $\vec{u} = a\vec{v}$ ou $\vec{v} = a\vec{u}$ soit $\vec{u} - a\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{v} - a\vec{u} = \vec{0}$, dans les deux cas $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée. $\square$

Exemple 1.36. — Dans $\mathbb{R}^3$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont colinéaires, puisque $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$, donc la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est liée. Par contre $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_3$ sont non colinéaires. En effet, les composantes de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles. Donc, la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_3)$ est libre.

Proposition 1.37

Toute sous-famille non vide d'une famille libre est libre.

Démonstration. — On considère une famille libre $\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$. Une sous-famille de $\mathcal{U}$ est une famille composée de vecteurs de $\mathcal{U}$. S'il existe une sous-famille de $\mathcal{U}$ liée alors il existe un vecteur de cette sous-famille, donc de $\mathcal{U}$ qui est combinaison linéaire des autres vecteurs de cette sous-famille, donc combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{U}$. Ceci prouve que $\mathcal{U}$ est une famille liée, ce qui contredit l'hypothèse que $\mathcal{U}$ est une famille libre. Par conséquent, toute sous-famille est libre. $\square$

4.2. Familles génératrices de $\mathbb{R}^n$. —

Définition 1.38

Soit $\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On dit que $\mathcal{U}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ si tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{U}$ soit

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \vec{x} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p.$$

Exemple 1.39. — La base canonique est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$. En effet, tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ est combinaison linéaire des vecteurs de la base canonique.

5. Produit scalaire euclidien

Le produit scalaire est une opération entre vecteurs définie de la manière suivante

Définition 1.40 – Produit scalaire euclidien

Soit n un entier naturel non nul, soit $\vec{u} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $\vec{v} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on appelle *produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$* le nombre **réel**, noté $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ défini par :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *orthogonaux* si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

Le produit scalaire est ainsi nommé car il associe à deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ un nombre réel (appelé aussi un scalaire).

Définition 1.41 – norme euclidienne

Soit n un entier naturel non nul, soit $\vec{u} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on appelle *norme euclidienne de $\vec{u}$* le nombre **réel**, noté $\|\vec{u}\|$ défini par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

La norme d'un vecteur correspond à sa longueur.

Proposition 1.42 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

oit u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on a

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|.$$

Il y a égalité si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Remarque 1.43. — Cette propriété montre le lien entre le produit scalaire et la position des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ l'un par rapport à l'autre. Ainsi, lorsque le produit scalaire est proche du produit des normes en valeur absolue, cela signifie que les deux vecteurs sont presque colinéaires et lorsque le produit scalaire est nul, les vecteurs sont orthogonaux.

6. Exercices

Exercice 1.1. — Dans $\mathbb{R}^2$, on donne les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On considère les trois vecteurs suivants : $\vec{w}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $\vec{w}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ et $\vec{w}_3 = 2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2$.

1. Représenter géométriquement (dans un repère orthonormé) les cinq vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ et $\vec{w}_3$ sans calculer explicitement $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ et $\vec{w}_3$.
2. Calculer explicitement $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ et $\vec{w}_3$ et vérifier que la représentation géométrique précédente est correcte.

Exercice 1.2. — Les 4 questions sont indépendantes.

1. Le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$?
2. Déterminer les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ sachant que : $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Soit un réel m et les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$.
A quelle condition sur m , le vecteur $\vec{w}$ est-il combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

Exercice 1.3. — 1. Montrer que le sous-ensemble $\{\vec{0}\}$ de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2. On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on considère $E = \{\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, x_1 > 0, x_2 > 0\}$. Le sous-ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
3. On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on considère $F = \{\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, x_1 x_2 \geq 0\}$.
Le sous-ensemble F contient-il le vecteur nul de $\mathbb{R}^2$? Montrer que F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.4. — Soit F le sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, x - z = a, y - t = b \right\} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels. Déterminer}$$

une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que F soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 1.5. — On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on considère les deux sous-ensembles D_1 et D_2 définis par : $D_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, x = 0 \right\}$ et $D_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, y = 0 \right\}$.

1. Montrer que D_1 et D_2 sont des sous-espaces vectoriels en considérant la notion de sous-espace vectoriel engendré. Quelle est leur intersection ?
2. Montrer que la réunion $D_1 \cup D_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.6. — Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1.7. — On considère les vecteurs : $u = (4, 2, 4)$ et $v = (4, 0, 3)$.

1. Calculer le produit scalaire de u et de v , ainsi que les normes de u et de v .
2. Vérifier que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est bien satisfaite.

7. Corrections des exercices

Correction de l'exercice 1.1

1. On obtient la représentation suivante

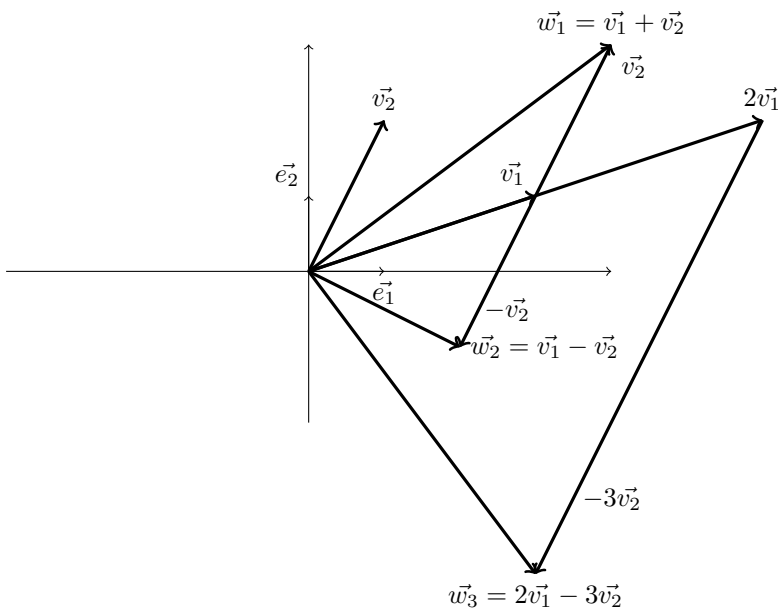


FIGURE 2. Combinaison linéaire de vecteurs.

2. On applique les règles de calcul sur les vecteurs, donc

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{w}_3 = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

La vérification est alors immédiate.

Correction de l'exercice 1.2

1. On cherche s'il existe deux réels a et b tels que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix},$$

ce qui signifie que a et b sont solutions d'un système linéaire donné par

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ -2a - 4b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2b \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Il n'y a donc pas de solutions pour ce système, ce qui signifie que le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

2. Il s'agit de résoudre un système dont les inconnus sont des vecteurs, on transforme ce système en un système équivalent en considérant la somme et la différence

$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} & L_1 \\ \vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} & L_1 + L_2 \\ 2\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} & L_1 - L_2 \end{cases}$$

On en conclut que

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}.$$

3. On cherche à quelle condition il existe deux réels a et b tels que

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

Ce qui revient à étudier le système à deux inconnus et trois équations

$$\begin{cases} a + b = m & L_1 \\ a + mb = 1 & L_2 \\ a - b = m & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} (a+b) + (a-b) = 2m & L_1 + L_3 \\ (a+b) - (a-b) = 0 & L_1 - L_3 \\ a + mb = 1 & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = m \\ b = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

Par conséquent, le vecteur $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si $m = 1$.

Correction de l'exercice 1.3

1. Le sous-ensemble $\{\vec{0}\}$ n'est pas vide, il contient le vecteur nul. De plus, comme cet ensemble ne contient qu'un seul élément, l'étude de la stabilité par combinaison linéaire revient à ne considérer, pour tout réel λ , que $\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Or $\vec{0} + \lambda\vec{0} = \vec{0} \in \{\vec{0}\}$. Par conséquent, $\{\vec{0}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2. L'ensemble E ne contient pas le vecteur nul donc n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
3. L'ensemble F contient le vecteur nul puisque $0 \times 0 \geq 0$. Cependant, ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet, le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur de F comme le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et pourtant $\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur de F car $1 \times (-1) = -1 < 0$.

Correction de l'exercice 1.4

Une condition nécessaire pour que l'ensemble F soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ est que le vecteur nul soit dans F , donc $0 - 0 = a$ et $0 - 0 = b$. Par conséquent, si F est un sous-espace vectoriel, alors $a = b = 0$.

Réciproquement, si $a = b = 0$, alors pour tout vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^4$, on

a

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ y - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x \\ t = y \end{cases}$$

On en déduit que

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ y \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Ce qui exprime que

$$F = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

On en conclut que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ si et seulement si $a = b = 0$.

Correction de l'exercice 1.5

1. On a

$$\forall \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \vec{u} \in D_1 \iff x = 0.$$

On en déduit que

$$D_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ainsi

$$D_1 = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

On en déduit que D_1 est un sous-espace vectoriel.

De même, on a

$$D_2 = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

Donc, D_2 est un sous-espace vectoriel.

L'intersection de D_1 et de D_2 est réduite au vecteur nul.

2. La réunion $D_1 \cup D_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car la somme de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, vecteur de D_1 , et de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, vecteur de D_2 , donne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui n'est pas dans l'union $F_1 \cup F_2$.

Correction de l'exercice 1.7

On considère les vecteurs : $u = (4, 2, 4)$ et $v = (4, 0, 3)$.

1. Par calcul, on obtient que

$$\langle u, v \rangle = 4 \times 4 + 2 \times 0 + 4 \times 3 = 28, \text{ et } \|u\| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6,$$

et

$$\|v\| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

2. Le produit des normes est 30 qui est supérieur au produit scalaire. Donc l'inégalité de Cauchy Schwarz est satisfaite.

8. Applications économiques

Application 1.1. — Dans $\mathbb{R}^3$, on donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et

$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui représentent respectivement les dividendes des titres financiers

A , B et C . Les composantes a_t , b_t et c_t définissent les revenus temporels de chacun de ces titres pour la date t avec $t = 1, 2, 3$. On considère le portefeuille P détenu par un agent et défini par la relation vectorielle suivante :

$$\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}.$$

1. Calculer explicitement le vecteur $\vec{p}$.
2. Montrer que le vecteur $\vec{c}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. En déduire le portefeuille de synthèse du titre financier C .

Définition 1.44 – Portefeuille de synthèse

Soit x et y deux réels et $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs représentant respectivement les dividendes des titres A et B . Le portefeuille de synthèse d'un titre C dans $\mathbb{R}^2$ dont les dividendes sont représentés par le vecteur $\vec{c}$ est représenté par la combinaison linéaire suivante

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

3. L'agent vend 6 titres financiers C . Définir la relation vectorielle de ce nouveau portefeuille Q . En déduire les stratégies financières de l'agent. Calculer explicitement le vecteur $\vec{q}$. Commenter économiquement les revenus financiers du portefeuille Q .

Définition 1.45 – Vente à découvert

La vente à découvert est une stratégie financière qui consiste à vendre un titre financier non détenu par un agent qui anticipe une baisse du prix dudit titre

Remarque 1.46. — Stratégie financière et vente à découvert

Lorsqu'un agent vend un titre à découvert, les dividendes du portefeuille dudit agent comportent un coefficient réel négatif devant le vecteur des dividendes de ce titre de la combinaison linéaire vectorielle.

4. Si le prix de l'actif financier A s'établit à $p_A = 12$ et le prix de l'actif B s'établit à $p_B = 6$, en déduire le prix de l'actif C noté p_C en absence d'opportunité d'arbitrage.

Définition 1.47 – Prix au comptant

Dans $\mathbb{R}^T$, le prix au comptant d'un actif i , noté q_i , est payé à la date initiale, c'est-à-dire à la date $t = 0$. Par défaut, tout prix est considéré au comptant.

Proposition 1.48 – Valorisation avec absence d’opportunité d’arbitrage

Soit x et y deux réels. Si les dividendes d’un titre C représentés par un vecteur $\vec{c}$ sont combinaison linéaire des dividendes des deux titres A et B représentés respectivement par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ alors le prix de l’actif C en absence d’opportunité d’arbitrage est défini par

$$p_C = xp_A + yp_B.$$

Proposition 1.49 – Valorisation avec opportunité d’arbitrage

Soit x et y deux réels. Si les dividendes d’un titre C représentés par un vecteur $\vec{c}$ sont combinaison linéaire des dividendes des deux titres A et B représentés respectivement par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ alors le prix de l’actif C avec opportunité d’arbitrage est défini par

$$p_C \neq xp_A + yp_B.$$

Remarque 1.50. — Valorisation par arbitrage

- En présence d’opportunité d’arbitrage, le prix d’un actif peut être négatif.
- En absence d’opportunité d’arbitrage, le prix d’un actif dont les dividendes sont positifs ou au moins un dividende est différent de 0 est toujours positif.

Application 1.2. — Dans $\mathbb{R}^3$, on donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui représentent respectivement les dividendes des titres financiers A et B . Les composantes a_t et b_t définissent les revenus temporels de chacun de ces titres pour la date t avec $t = 1, 2, 3$. Soit le vecteur $\vec{c} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ qui représente les dividendes d’un titre financier C .

1. Déterminer l’ensemble des titres financiers qui peuvent être synthétisés avec les titres A et B .
2. Peut-on synthétiser l’actif unitaire U dont les dividendes sont représentés

par le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

3. On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on considère $S = \{\vec{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, z = 2x + y\}$.

Montrer que le sous-ensemble S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Application 1.3. — Dans $\mathbb{R}^3$, on donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

qui représentent respectivement les dividendes des titres financiers A et B . Les composantes a_t et b_t définissent les revenus temporels de chacun de ces titres pour la date t avec $t = 1, 2, 3$.

1. Déterminer l'ensemble des titres financiers qui peuvent être synthétisés avec les titres A et B .

Soit α un réel strictement positif et le vecteur $\vec{c} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ qui représente

les dividendes d'un titre financier C .

2. Peut-on synthétiser cet actif?
3. Calculer la valorisation par intervalle de cet actif en l'absence d'opportunité d'arbitrage pour $p_A = 1$ et $p_B = 2$.

Proposition 1.51 – Valorisation par intervalle sans opportunité d'arbitrage

Soit $\underline{x}$, $\bar{x}$, $\underline{y}$ et $\bar{y}$ quatre réels strictement positifs tels que $\underline{x} < \bar{x}$ et $\underline{y} < \bar{y}$. Si les dividendes d'un titre C ne peuvent être décrits par un vecteur $\vec{c}$ combinaison linéaire des dividendes des deux titres A et B représentés respectivement par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, alors le prix de l'actif C en l'absence d'opportunité d'arbitrage est défini par l'intervalle suivant

$$\underline{x}p_A + \underline{y}p_B = \underline{p}_C < p_C < \overline{p}_C = \bar{x}p_A + \bar{y}p_B,$$

avec $\underline{p}_C$ le minorant maximal de p_C et $\overline{p}_C$ le majorant minimal de p_C .

Application 1.4. — Dans $\mathbb{R}^3$, on donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et

$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ qui représentent respectivement les dividendes des titres financiers

A , B et C . Les composantes a_t , b_t et c_t définissent les revenus temporels de chacun de ces titres pour la date t avec $t = 1, 2, 3$.

1. Montrer que le vecteur $\vec{c}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. En déduire le portefeuille de synthèse du titre financier C .
2. Déterminer l'ensemble des titres financiers qui peuvent être synthétisés avec les titres A et B .
3. Nous considérons le portefeuille P composé de x titres A et y titres B avec x et y deux réels positifs. Calculer explicitement le vecteur $\vec{p}$ qui définit les dividendes de ce portefeuille.
4. Peut-on déterminer une stratégie d'investissement (i.e. une composition de portefeuille (x, y)) qui permet de doubler les dividendes à chaque période?
5. Quelle devrait être la composante b_2 du vecteur $\vec{b}$ pour que les dividendes doublent à chaque période?
6. Calculer l'accroissement relatif constant des dividendes du portefeuille à chaque période qui est possible pour une stratégie d'investissement (x, y) .

Application 1.5. — Dans $\mathbb{R}^4$, on donne les vecteurs $\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\vec{z}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{z}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui représentent respectivement les dividendes des

zéros-coupons d'échéance t avec $t = 1, 2, 3, 4$. Les composantes de ces vecteurs définissent les revenus temporels de chacun de ces titres pour chaque date.

Définition 1.52 – Définition d'un zéro-coupon

Un zéro-coupon d'échéance t avec $1 \leq t \leq T$ est une obligation particulière qui délivre un revenu unitaire à la date d'échéance t et nul sinon, contre un paiement β_t à la date $t = 0$. Ses dividendes sont représentés par le vecteur

$$\vec{z}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \underbrace{1}_{\text{date } t} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.53 – Base canonique

On dit que la famille $\mathcal{B} = (\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_t, \dots, \vec{z}_T)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^T$.

Tout vecteur de $\mathbb{R}^T$ est combinaison linéaire de la base canonique. Ce qui nous donne

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_T \end{pmatrix} = x_1 \vec{z}_1 + \dots + x_T \vec{z}_T = \sum_{t=1}^T x_t \vec{z}_t.$$

1. Montrer que tous les vecteurs $\vec{z}_t$ pour tout t avec $t = 1, 2, 3, 4$ sont orthogonaux deux à deux.

2. Peut-on synthétiser l'actif C dont les dividendes sont représentés par le

vecteur $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$?

On donne le vecteur « prix des zéros-coupons » $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.5 \\ 0.4 \\ 0.1 \end{pmatrix}$.

3. Calculer le prix de l'actif C en l'absence d'opportunité d'arbitrage.

Remarque 1.54. — Zéro-coupons et Base canonique

Comme les zéro-coupons définissent une base canonique, le système de marchés financiers est dit complet car il permet de réallouer n'importe quel montant de ressources vers n'importe quelle date, et donc de valoriser tout actif en l'absence d'opportunité d'arbitrage.

Proposition 1.55 – Valorisation au comptant avec les zéros-coupons

En l'absence d'opportunité d'arbitrage et avec une base case canonique $\mathcal{B} = (\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_t, \dots, \vec{z}_T)$, le prix d'un actif X , noté p_X ,

dont les dividendes sont représentés par le vecteur $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_T \end{pmatrix}$ est

égal au produit scalaire suivant

$$p_X = \langle \vec{x}, \vec{\beta} \rangle = \sum_{t=1}^T x_t \beta_t,$$

où le vecteur « prix des zéro-coupons » $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_T \end{pmatrix}$ dont les composantes définissent les prix des T zéro-coupons.

4. Le prix de l'actif C est payé en 5 fois et ce, de manière constante. On note $\tilde{p}_C$ ce montant. Calculer $\tilde{p}_C$ en absence d'opportunité d'arbitrage.

5. Le prix de l'actif C est payé à terme. On note p_C^T ce montant. Calculer p_C^T en absence d'opportunité d'arbitrage. Vous montrerez au préalable la formule de valorisation appliquée.

Définition 1.56 – Prix à terme

Dans $\mathbb{R}^T$, le prix à terme d'un actif i , noté q_i^T , est payé à la date terminale, c'est-à-dire à la date $t = T$.

Proposition 1.57 – Valorisation à termes avec les zéro-coupons

En l'absence d'opportunité d'arbitrage et avec une base case canonique $\mathcal{B} = (\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_t, \dots, \vec{z}_T)$, le prix d'un actif X , noté p_X ,

dont les dividendes sont représentés par le vecteur $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_T \end{pmatrix}$ est

égal au produit scalaire suivant

$$p_X = \frac{\langle \vec{x}, \vec{\beta} \rangle}{\beta_T} = \frac{\sum_{t=1}^T x_t \beta_t}{\beta_T},$$

où le vecteur « prix au comptant des zéro-coupons » $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_T \end{pmatrix}$

dont les composantes définissent les prix des T zéro-coupons.

6. Il existe également un système de fonds prêtables dont les prix sont les taux d'intérêts courts, notés r_t pour tout t avec $t = 1, 2, 3, 4$. Montrer que le vecteur « prix au comptant des zéro-coupons » s'écrit également

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+r_1} \\ \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)} \\ \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)} \\ \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4)} \end{pmatrix}.$$

Définition 1.58 – Taux d'intérêt court

Dans $\mathbb{R}^T$, le taux d'intérêt court, noté r_t , mesure le rendement financier d'une opération sur un marché dont la date d'ouverture est $t - 1$ et la date de fermeture t .

Définition 1.59 – Valeur actualisée

Dans $\mathbb{R}^T$, pour tout $t \in \llbracket 1, T \rrbracket$, la valeur actualisée de x_t est égale à

$$\frac{x_t}{\prod_{i=1}^t (1 + r_i)}.$$

Remarque 1.60. — Prix au comptant

En l'absence d'opportunité d'arbitrage, le prix au comptant d'un titre

financier est égal à la somme des valeurs des dividendes actualisés par les taux d'intérêt courts.

7. Montrer que la valeur du taux d'intérêt court r_t est donnée pour tout t avec $t = 1, 2, 3, 4$ par

$$r_t = \frac{\beta_{t-1}}{\beta_t} - 1 \text{ avec } \beta_0 = 1.$$

8. Calculer la valeur des taux d'intérêt courts.

9. Corrections des applications économiques

Correction de l'exercice 1.1

1. En appliquant les règles de calcul sur les vecteurs, on obtient

$$\vec{p} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 9 + 4 \\ 8 + 6 + 4 \\ 12 + 3 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 18 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

2. On cherche deux réels x et y tels que

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Ce qui revient à étudier le système à deux inconnues et trois équations suivant

$$\begin{cases} 1 &= 2x + 3y & (1) \\ 1 &= 4x + 2y & (2) \\ 1 &= 6x + y & (3) \end{cases}$$

L'équation (1) donne

$$x = \frac{1 - 3y}{2} \quad (4).$$

Nous reportons cette expression dans (2) pour obtenir

$$1 = 4 \left(\frac{1 - 3y}{2} \right) + 2y \quad (5)$$

Soit

$$1 = 2 - 6y + 2y \quad (6)$$

Ce qui nous donne

$$y = \frac{1}{4} \quad (7).$$

En reportant cette valeur dans l'équation (4), nous obtenons

$$x = \frac{1 - 3 \times 1/4}{2} = \frac{1}{8} \quad (8).$$

Assurons-nous que les valeurs de x et de y caractérisées par les équations (8) et (7) vérifient l'équation (3). Nous avons

$$6x + y = 6 \times \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = 1.$$

Par conséquent, le vecteur $\vec{c}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ si et seulement si $x = 0,125$ et $y = 0,25$. Nous avons

$$\vec{c} = \frac{1}{8}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}.$$

D'un point de vue financier, le portefeuille de synthèse de l'actif financier C est composé de 0,125 actifs financiers A et 0,25 actifs financiers B .

3. La vente de 6 titres financiers C conduit au nouveau portefeuille Q défini par la relation vectorielle suivante :

$$\vec{q} = \vec{p} - 6\vec{c}.$$

Ce qui nous donne

$$\vec{q} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}.$$

L'agent achète 2 titres financiers A et 3 titres financiers B . Il vend également à découvert 2 titres C , ce qui explique le coefficient négatif devant le vecteur $\vec{c}$.

En appliquant les règles de calcul sur les vecteurs, on obtient

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 17 \\ 18 \\ 19 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Avec le portefeuille Q , l'agent reçoit 11 unités monétaires à la date $t = 1$, 12 unités monétaires à la date $t = 2$ et 13 unités monétaires à la date $t = 3$.

4. En absence d'opportunité d'arbitrage, si

$$\vec{c} = 0,125\vec{a} + 0,25\vec{b}.$$

alors

$$p_c = 0,125p_a + 0,25p_b.$$

Ce qui nous donne

$$p_c = 0,125 \times 12 + 0,25 \times 6 = 3.$$

Correction de l'exercice 1.2

1. L'ensemble des titres financiers qui peuvent être synthétisés avec les titres

A et B est représenté par le vecteur $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$. On cherche alors à quelle condition il existe deux réels x et y tels que

$$\vec{s} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Ce qui revient à étudier le système à deux inconnues et trois équations suivant

$$\begin{cases} s_1 = 2x + 0y & (1) \\ s_2 = 0x + y & (2) \\ s_3 = 4x + y & (3) \end{cases}$$

Les équation (1) et (2) nous donne respectivement

$$\begin{cases} x &= \frac{s_1}{2} & (4) \\ y &= s_2 & (5) \end{cases}$$

En reportant ces 2 valeurs dans l'équation (3), nous obtenons

$$s_3 = 4\frac{s_1}{2} + s_2.$$

Ce qui nous donne

$$s_3 = 2s_1 + s_2.$$

L'ensemble des titres financiers qui peut être synthétisé par les actifs A et B est représenté par le vecteur $\vec{s}$ défini par

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ 2s_1 + s_2 \end{pmatrix},$$

avec s_1 et s_2 deux réels.

2. L'actif unitaire U dont les dividendes sont représentés par le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne peut s'écrire comme une combinaison des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ car la relation suivante n'est pas respectée

$$2s_1 + s_2 = 2 \times 1 + 1 = 3 \neq 1 = s_3.$$

3. Pour tout vecteur $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} \vec{s} \in S &\iff \exists (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ 2s_1 + s_2 \end{pmatrix} \\ &\iff \exists (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \\ 2s_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s_2 \\ s_2 \end{pmatrix} \\ &\iff \exists (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \vec{s} = s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \vec{s} \in \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \end{aligned}$$

On a donc

$$S = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

On en conclut que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. D'un point de vue financier, tous les titres qui peuvent synthétiser à l'aide d'autres actifs forment un sous-espace vectoriel.

Correction de l'exercice 1.3

1. L'ensemble des titres financiers qui peut être synthétisé par les actifs A et B est représenté par le vecteur $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$. On cherche alors à quelle condition il existe deux réels x et y tels que

$$\vec{s} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Ce qui revient à étudier le système à deux inconnues et trois équations suivant

$$\begin{cases} s_1 = x + y & (1) \\ s_2 = 0x + 2y & (2) \\ s_3 = 2x + 0y & (3) \end{cases}$$

Les équation (2) et (3) nous donne respectivement

$$\begin{cases} x = \frac{s_3}{2} & (4) \\ y = \frac{s_2}{2} & (5) \end{cases}$$

En reportant ces 2 valeurs dans l'équation (1), nous obtenons

$$s_1 = \frac{s_3}{2} + \frac{s_2}{2} = \frac{s_2 + s_3}{2}.$$

L'ensemble des titres financiers qui peut être synthétisé par les actifs A et B est représenté par le vecteur $\vec{s}$ défini par

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \frac{s_2 + s_3}{2} \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix},$$

avec s_2 et s_3 deux réels.

2. L'actif C dont les dividendes sont représentés par le vecteur $\vec{c} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$

ne peut s'écrire comme une combinaison des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ car la relation suivante n'est pas respectée pour $\alpha > 0$

$$\frac{s_2 + s_3}{2} = \frac{2\alpha + \alpha}{2} = \frac{3}{2}\alpha \neq \alpha = s_1.$$

3. Pour calculer le prix inférieur de l'actif C , nous caractérisons pour deux réels $\underline{x}$ et $\underline{y}$ strictement positifs, la combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ définie par

$$\underline{x}a_t + \underline{y}b_t \leq c_t.$$

Ce qui revient à étudier le système à deux inconnues et trois inéquations suivant pour $\alpha > 0$

$$\begin{cases} \underline{x} + \underline{y} & \leq & \alpha \\ 0\underline{x} + 2\underline{y} & \leq & 2\alpha \\ 2\underline{x} + 0\underline{y} & \leq & \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \underline{x} + \underline{y} & \leq & \alpha \quad (1) \\ \underline{y} & \leq & \alpha \quad (2) \\ \underline{x} & \leq & \alpha/2 \quad (3) \end{cases}$$

Pour obtenir les valeurs maximales de $\underline{x}$ et $\underline{y}$ deux possibilités s'offrent à nous.

- i) L'inéquation (2) est saturée. Ce qui nous donne $\underline{y} = \alpha$. En reportant cette valeur dans l'inéquation (1), nous obtenons $\underline{x} + \underline{y} = \underline{x} + \alpha \leq \alpha$. Ce qui implique la saturation de cette inéquation et $\underline{x} = 0$. Cette valeur vérifie l'inéquation (3) car $\underline{x} = 0 < \alpha/2$.
- ii) L'inéquation (3) est saturée. Ce qui nous donne $\underline{x} = \alpha/2$. En reportant cette valeur dans l'inéquation (1), nous obtenons $\underline{x} + \underline{y} = \alpha/2 + \underline{y} \leq \alpha$. Ce qui implique la saturation de cette inéquation et $\underline{y} = \alpha/2$. Cette valeur vérifie l'inéquation (2) car $\underline{y} = \alpha/2 < \alpha$.

Dans le cas i), le prix minimal de l'actif C est défini par le produit scalaire

$$p_C = \langle \underline{\vec{\mu}}, \vec{p} \rangle \text{ où } \underline{\vec{\mu}} = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{p} = \begin{pmatrix} p_A \\ p_B \end{pmatrix}.$$

Ce qui nous donne

$$\underline{p}_C = \underline{x} p_A + \underline{y} p_B = 0 \times 1 + 2 \times \alpha = 2\alpha.$$

Dans le cas ii), le prix minimal de l'actif C est défini par le produit scalaire

$$\underline{p}_C = \underline{x} p_A + \underline{y} p_B = 1 \times \alpha/2 + 2 \times \alpha/2 = \frac{3}{2}\alpha.$$

Par définition, on a pour tout $\alpha > 0$

$$\underline{p}_C = \max(2\alpha, 3/2\alpha) = 2\alpha.$$

Pour calculer le prix supérieur de l'actif C , nous caractérisons pour deux réels $\bar{x}$ et $\bar{y}$ strictement positifs, la combinaison des linéaires des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ défini par

$$\bar{x} \vec{a} + \bar{y} \vec{b}$$

telle que les composantes de cette combinaison soient supérieures à celle du vecteur $\vec{c}$ pour tout t avec $t = 1, 2, 3$

$$\bar{x} a_t + \bar{y} b_t \geq c_t.$$

Ce qui revient à étudier le système à deux inconnues et trois inéquations suivant pour $\alpha > 0$

$$\begin{cases} \bar{x} + \bar{y} & \geq & \alpha \\ 0\bar{x} + 2\bar{y} & \geq & 2\alpha \\ 2\bar{x} + 0\bar{y} & \geq & \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \bar{x} + \bar{y} & \geq & \alpha \quad (1) \\ \bar{y} & \geq & \alpha \quad (2) \\ \bar{x} & \geq & \alpha/2 \quad (3) \end{cases}$$

Pour obtenir les valeurs minimales de $\bar{x}$ et $\bar{y}$, il existe une solution évidente décrite par la saturation des inéquations (2) et (3). Ce qui nous donne $\bar{x} = \alpha/2$ et $\bar{y} = \alpha$. Ces deux valeurs vérifient l'inéquation (1) car $\bar{x} + \bar{y} = \alpha/2 + \alpha = 3/2\alpha > \alpha$. Par conséquent, le prix maximal de l'actif C est défini par le produit scalaire

$$p_C = \langle \vec{\mu}, \vec{p} \rangle \text{ où } \vec{\mu} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{p} = \begin{pmatrix} p_A \\ p_B \end{pmatrix}.$$

Ce qui nous donne

$$p_C = \bar{x} p_A + \bar{y} p_B = \alpha/2 \times 1 + 2 \times \alpha = \frac{5}{2}\alpha.$$

En l'absence d'opportunité d'arbitrage, la valorisation par intervalle du titre C s'établit à

$$\underbrace{2\alpha}_{=p_C} < p_C < \underbrace{2.5\alpha}_{=\overline{p_C}}$$

Correction de l'exercice 1.4

1. On cherche à quelle condition il existe deux réels x et y tels que

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Ce qui revient à étudier le système à deux inconnues et trois équations suivant

$$\begin{cases} 4 &= 2x + 0y & (1) \\ 6 &= 0x + 6y & (2) \\ 6 &= 2x + 2y & (3) \end{cases}$$

Les équation (1) et (2) nous donne respectivement

$$\begin{cases} x &= \frac{4}{2} = 2 & (4) \\ y &= \frac{6}{6} = 1 & (5) \end{cases}$$

Assurons-nous que les valeurs de x et de y caractérisées par les équations (4) et (5) vérifient l'équation (3). Nous avons

$$2x + 2y = 22 + 21 = 6.$$

Par conséquent, le vecteur $\vec{c}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et nous avons

$$\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}.$$

D'un point de vue financier, le portefeuille de synthèse de l'actif financier C est composé de 2 actifs financiers A et 1 actif financier B .

2. L'ensemble des titres financiers qui peut être synthétisé par les actifs A et B est représenté par le vecteur $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$. On cherche alors à quelle condition il existe deux réels x et y tels que

$$\vec{s} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Ce qui revient à étudier le système à deux inconnues et trois équations suivant

$$\begin{cases} s_1 &= 2x + 0y & (1) \\ s_2 &= 0x + 6y & (2) \\ s_3 &= 2x + 2y & (3) \end{cases}$$

Les équation (1) et (2) nous donne respectivement

$$\begin{cases} x &= \frac{s_1}{2} & (4) \\ y &= \frac{s_2}{6} & (5) \end{cases}$$

En reportant ces 2 valeurs dans l'équation (3), nous obtenons

$$s_3 = 2s_1/2 + 2s_2/6 \quad (6).$$

Ce qui nous donne

$$s_3 = s_1 + s_2/3 \quad (7).$$

L'ensemble des titres financiers qui peut être synthétisé par les actifs A et B est représenté par le vecteur $s\vec{s}$ défini par

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_1 + \frac{1}{3}s_2 \end{pmatrix} \text{ avec } s_1 \text{ et } s_2 \text{ deux réels.}$$

3. Les dividendes du portefeuille P sont représentés par le vecteur $\vec{p}$ défini par

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

En appliquant les règles de calcul sur les vecteurs, on obtient

$$\vec{p} = x \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 6y \\ 2x + 2y \end{pmatrix}.$$

4. Des dividendes qui doublent à chaque période sont représentés par le vecteur $\vec{p}' = \begin{pmatrix} m \\ 2m \\ 4m \end{pmatrix}$ avec m un réel strictement positif. Il existe une stratégie financière (x, y) qui permet de doubler les dividendes à chaque période si $\vec{p} = \vec{p}'$. On cherche alors à quelle condition il existe deux réels x et y tels que

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{p}'.$$

Ce qui revient à étudier le système à deux inconnues et trois équations suivant

$$\begin{cases} 2x &= m & (1) \\ 6y &= 2m & (2) \\ 2x + 2y &= 4m & (3) \end{cases}$$

Les équation (1) et (2) nous donnent respectivement

$$\begin{cases} x &= m/2 & (4) \\ y &= m/3 & (5) \end{cases}$$

En reportant ces 2 valeurs dans l'équation (3), nous avons pour tout $m > 0$

$$2x + 2y = 2\frac{m}{2} + 2\frac{m}{3} = \frac{5}{3}m \neq 4m \quad (6).$$

Il n'existe pas donc pas de stratégie de portefeuille (x, y) qui permet de doubler les dividendes à chaque période.

5. Si le vecteur $\vec{b}$ se réécrit $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 2 \end{pmatrix}$, le système précédent à 2 inconnues et 3 équations se réécrit

$$\begin{cases} 2x & = & m & (1) \\ b_2 y & = & 2m & (2) \\ 2x + 2y & = & 4m & (3) \end{cases}$$

Les équation (1) et (2) nous donnent respectivement

$$\begin{cases} x & = & m/2 & (4) \\ y & = & 2m/b_2 & (5) \end{cases}$$

En reportant ces 2 valeurs dans l'équation (3), nous avons pour tout $m > 0$

$$2x + 2y = 2\frac{m}{2} + 2\frac{2m}{b_2} = \frac{b_2 + 4}{b_2}m = 4m \quad (6).$$

Cette équation admet une solution si pour tout $m > 0$

$$(b_2 + 4)/b_2 = 4 \quad (7)$$

Ce qui nous donne $b_2 = 4/3$. Si et seulement si $b_2 = 4/3$, il existe pour tout $m > 0$ une stratégie de portefeuille $(x = m/2, y = 3m/2)$ qui permet de doubler les dividendes à chaque période.

6. Des dividendes sont multipliés par k à chaque période sont représentés par le vecteur $\vec{p}'' = \begin{pmatrix} m \\ km \\ k^2m \end{pmatrix}$ avec k et m des réels positifs. Il existe une

stratégie financière (x, y) qui permet de multiplier par k les dividendes à chaque période si $\vec{p} = \vec{p}''$. On cherche alors à quelle condition il existe deux réels x et y tels que

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{p}''.$$

Ce qui revient à étudier le système à deux inconnues et trois équations suivant

$$\begin{cases} 2x & = & m & (1) \\ 6y & = & km & (2) \\ 2x + 2y & = & k^2m & (3) \end{cases}$$

Les équation (1) et (2) nous donnent respectivement

$$\begin{cases} x & = & m/2 & (4) \\ y & = & km/6 & (5) \end{cases}$$

En reportant ces 2 valeurs dans l'équation (3), nous avons pour tout $m > 0$

$$2x + 2y = 2\frac{m}{2} + 2\frac{km}{6} = m(1 + \frac{k}{3}) = k^2m.$$

Cette équation admet une solution s'il existe une valeur $k > 0$ telle que

$$1 + k/3 = k^2 \iff k^2 - k/3 - 1 = 0.$$

Posons $P(k)$ le polynôme de degré 2 suivant

$$P(k) = k^2 - k/3 - 1.$$

Le discriminant de $P(k)$ est égal à

$$\Delta = (-1/3)^2 - 4(-1) = 1/9 + 4 = 37/9 > 0$$

Le polynôme $P(k)$ admet 2 racines réelles égales à

$$k_1 = \frac{1/3 - \sqrt{379}}{21} = \frac{1 - \sqrt{37}}{6} \simeq -2,54 < 0$$

$$\text{et } k_2 = \frac{1/3 + \sqrt{379}}{21} = \frac{1 + \sqrt{37}}{6} \simeq 3,54 > 0.$$

Comme $k > 0$, nous avons $k = 3,54$. Il existe donc une stratégie de portefeuille ($x = m/2, y = 0,59m$) qui permet de multiplier par 3,54 les dividendes à chaque période.

Correction de l'exercice 1.5

1. Pour tout $t = 1, 2, 3, 4$ et pour tout $t' = 1, 2, 3, 4$ avec $t' \neq t$, le produit scalaire des vecteurs $\vec{z}_t$ et $\vec{z}_{t'}$ est égal à

$$\langle \vec{z}_t, \vec{z}_{t'} \rangle = \sum_{i=1}^4 z_{t,i} z_{t',i} = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0.$$

Les vecteurs $\vec{z}_t$ et $\vec{z}_{t'}$ sont bien orthogonaux 2 à 2. Ils forment la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

2. On peut synthétiser l'actif C dont les dividendes sont représentés par le

vecteur $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ avec le système financier complet de zéro-coupons. En

appliquant les règles du calcul sur les vecteurs, nous obtenons

$$\vec{c} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 12 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne

$$\vec{c} = 2\vec{z}_1 + 12\vec{z}_2 + \vec{z}_3 + 5\vec{z}_4.$$

Le portefeuille de synthèse de l'actif C est composé de 2 zéro-coupons d'échéance $t = 1$, 12 zéro-coupons d'échéance $t = 2$, de 1 zéro-coupons d'échéance $t = 3$ et de 5 zéro-coupons d'échéance $t = 4$.

3. En absence d'opportunité d'arbitrage, si

$$\vec{c} = 2\vec{z}_1 + 12\vec{z}_2 + \vec{z}_3 + 5\vec{z}_4$$

alors

$$p_C = \langle \vec{\beta}, \vec{c} \rangle = \sum_{t=1}^4 \beta_t c_t$$

Ce qui nous donne

$$p_C = 0.8 \times 2 + 0.5 \times 12 + 0.4 \times 1 + 0.1 \times 5 = 8.5.$$

4. Les dividendes nets de l'actif C sont représentés par le vecteur $\vec{\tilde{c}}$ défini par

$$\vec{\tilde{c}} = \vec{c} - p_C \vec{1}, \quad \text{avec } \vec{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En appliquant les règles de calcul sur les vecteurs, on obtient

$$\vec{\tilde{c}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - p_C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - p_C \\ 12 - p_C \\ 1 - p_C \\ 5 - p_C \end{pmatrix}.$$

En absence d'opportunité d'arbitrage, si

$$\vec{\tilde{c}} = (2 - p_C)\vec{z}_1 + (12 - p_C)\vec{z}_2 + (1 - p_C)\vec{z}_3 + (5 - p_C)\vec{z}_4$$

alors

$$p_C = \langle \vec{\beta}, \vec{\tilde{c}} \rangle = \sum_{t=1}^4 \beta_t \tilde{c}_t = \sum_{t=1}^4 \beta_t c_t - p_C \sum_{t=1}^4 \beta_t.$$

Ce qui nous donne la formule de valorisation suivante

$$p_C = \frac{\sum_{t=1}^4 \beta_t c_t}{1 + \sum_{t=1}^4 \beta_t} = \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{c} \rangle}{1 + \langle \vec{\beta}, \vec{1} \rangle} = \frac{p_C}{1 + \sum_{t=1}^4 \beta_t}.$$

D'où la valeur

$$p_C = \frac{8.5}{1 + 0.8 + 0.5 + 0.4 + 0.1} = \frac{8.5}{2.8} \simeq 3.04.$$

5. Les dividendes nets de l'actif C sont représentés par le vecteur $\vec{\tilde{c}}$ défini par

$$\vec{\tilde{c}} = \vec{c} - p_C^T \vec{z}_4.$$

En appliquant les règles de calcul sur les vecteurs, on obtient

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - p_C^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 1 \\ 5 - p_C^T \end{pmatrix}.$$

En absence d'opportunité d'arbitrage, si

$$\vec{c} = 2\vec{z}_1 + 12\vec{z}_2 + \vec{z}_3 + (5 - p_C^T)\vec{z}_4$$

alors

$$0 = \langle \vec{\beta}, \vec{c} \rangle = \sum_{t=1}^4 \beta_t c_t = \sum_{t=1}^4 \beta_t z_t - \beta_4 p_C^T.$$

Ce qui nous donne la formule de valorisation suivante

$$p_C^T = \frac{\sum_{t=1}^4 \beta_t z_t}{\beta_4} = \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{c} \rangle}{\beta_4} = \frac{p_C}{\beta_4}$$

D'où, la valeur

$$p_C^T = \frac{8.5}{0.1} = 85$$

6. Le prix au comptant de l'actif C est égal à la somme des dividendes actualisés par les valeurs des taux d'intérêts courts. Nous avons

$$p_C = \sum_{t=1}^4 \frac{x_t}{\prod_{i=1}^t (1 + r_i)}$$

Ce qui nous donne

$$p_C = \langle \vec{F}, \vec{c} \rangle \text{ avec } \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+r_1} \\ \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)} \\ \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)} \\ \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4)} \end{pmatrix}$$

Nous avons également

$$p_C = \langle \vec{\beta}, \vec{c} \rangle$$

Ce qui conduit à

$$\langle \vec{F}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{\beta}, \vec{c} \rangle$$

D'où, l'égalité suivante

$$\vec{\beta} = \vec{F}$$

Soit

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+r_1} \\ \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)} \\ \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)} \\ \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4)} \end{pmatrix}.$$

7. D'après les composantes du vecteur $\vec{\beta}$, nous obtenons les 4 égalités suivantes

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{1}{1+r_1} \\ \beta_2 = \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)} \\ \beta_3 = \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)} \\ \beta_4 = \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4)} \end{cases}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{1}{1+r_1} \\ \beta_2 = \frac{\beta_1}{1+r_2} \\ \beta_3 = \frac{\beta_2}{1+r_3} \\ \beta_4 = \frac{\beta_3}{1+r_4} \end{cases}$$

D'où, la formule de récurrence suivante pour tout t avec $t \in [1, T]$ et en posant $\beta_0 = 1$

$$\beta_t = \frac{\beta_{t-1}}{1+r_t}.$$

Nous en déduisons pour tout t avec $t \in [1, T]$ et en posant $\beta_0 = 1$, la formule de récurrence suivante

$$r_t = \frac{\beta_{t-1}}{\beta_t} - 1 \text{ avec } \beta_0 = 1.$$

8. Pour tout t avec $t \in [1, T]$ et en posant $\beta_0 = 1$, nous obtenons les valeurs suivantes des taux d'intérêt courts

$$\begin{cases} r_1 = \frac{\beta_0}{\beta_1} - 1 = \frac{1}{0.8} - 1 = \frac{1}{4} = 0.25 \\ r_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2} - 1 = \frac{3}{5} = 0.6 \\ r_3 = \frac{\beta_2}{\beta_3} - 1 = \frac{5}{4} - 1 = 0.25 \\ r_4 = \frac{\beta_3}{\beta_4} - 1 = 4 - 1 = 3 \end{cases}$$

CHAPITRE 2

MATRICES

1. Définitions

1.1. Définition d'une matrice. — Une matrice est un tableau de nombres défini de la manière suivante :

Définition 2.1

Soit n et p deux entiers non nuls. On appelle matrice à coefficients réels la donnée de $n \times p$ nombres réels notés : $\{a_{ij}\}_{i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, p\}}$. On représente une matrice sous forme d'un tableau A entouré de parenthèses :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note aussi une matrice par

$$A = (a_{ij})_{n,p} \text{ ou } A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$$

Le premier indice est l'indice de la ligne, le deuxième celui de la colonne.

On dit que a_{ij} est le terme général de la matrice A .

Si $n = p$, on dit que la matrice est une matrice carrée d'ordre n . Les termes a_{ii} pour $1 \leq i \leq n$ forment la diagonale principale de la matrice de la matrice A .

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ à n lignes et p colonnes.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n . On identifie $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$. On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de format $n \times p$.

Exemple 2.2. — :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est une matrice carrée d'ordre 3, sa diagonale est constituée des réels 1,0,2.

1.2. Matrices particulières. — Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, c'est une

— **matrice-ligne** si $n = 1$ et dans ce cas $A = (x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$.

— **matrice-colonne** si $p = 1$ et dans ce cas $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$.

— **matrice triangulaire supérieure** si $n = p$ et

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}, i > j \implies a_{ij} = 0.$$

Dans ce cas, on a une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

— **matrice triangulaire inférieure** si $n = p$ et

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}, i < j \implies a_{ij} = 0.$$

Dans ce cas, on a une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

— **matrice nulle** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ notée 0_{np} ou 0 (le contexte donnera les valeurs de n et p) si tous ses coefficients sont nuls.

— **matrice élémentaire** E_{kl} où $k \in \{1, \dots, n\}$ et $l \in \{1, \dots, p\}$,

$$E_{kl} = (e_{ij})_{n,p} \text{ où } e_{kl} = 1 \text{ et tous les autres coefficients sont nuls.}$$

On a dans ce cas une matrice de la forme

$$E_{k,l} = \begin{matrix} & \text{colonne } l \\ \text{ligne } k & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \vdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Exemple 2.3. — :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

A_1 est une matrice colonne, élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, A_2 est une matrice ligne, élément de $\mathcal{M}_{1,5}(\mathbb{R})$, A_3 est une matrice carrée d'ordre 3, élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est une matrice élémentaire de } \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}).$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ sont des matrices triangulaires supérieures.}$$

et

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ est une matrice triangulaire inférieure.}$$

1.3. Matrice représentant une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. — A toute famille de vecteurs on associe une matrice.

Définition 2.4

Soit $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_i, \dots, \vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit $\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_j, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, $\vec{u}_j$ est un n -uplet de réels :

$$\vec{u}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{e}_i$$

On définit la matrice A par la matrice de format $n \times p$ dont le terme courant est a_{ij} .

Ainsi la j ème colonne de A est le vecteur colonne $\vec{u}_j$. On notera

$$A = [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_j, \dots, \vec{u}_p].$$

On dit que la matrice $A = (a_{ij})_{n,p}$ représente la famille $\mathcal{U}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 2.5. — La notation globale, comme une ligne de vecteurs, $A = [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_j, \dots, \vec{u}_p]$ utilise des crochets pour éviter la confusion avec la famille notée $\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_j, \dots, \vec{u}_p)$ avec des parenthèses.

Exemple 2.6. — La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ représente la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ représente les trois vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ de $\mathbb{R}^4$ où

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1.4. Matrice transposée. — On a

Définition 2.7

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) : A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$.

On appelle transposée de A notée tA , la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ définie par : ${}^tA = (b_{ij})_{p,n}$ où

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}, b_{ij} = a_{ji}.$$

Exemple 2.8. — Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Remarque 2.9. — On trouve parfois la notation A^T avec la lettre t en majuscule et positionnée en exposant à droite.

2. Premières opérations sur les matrices

2.1. Egalité. —

Définition 2.10

On dit que deux matrices A et B sont égales si elles ont le même format n, p (n = nombre de lignes, p = nombre de colonnes) et

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \forall j \in \{1, \dots, p\} \quad a_{ij} = b_{ij}.$$

2.2. Addition. —

Définition 2.11

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la somme $A + B$ est la matrice $C = (c_{ij})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \forall j \in \{1, \dots, p\} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Remarque 2.12. — On ne peut additionner que des matrices de même format.

2.3. Multiplication par un scalaire. —

Définition 2.13

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ un réel, la matrice λA est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par : $\lambda A = (c_{ij})$ où

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad c_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

La matrice $(-1)A$ de terme général $(-a_{ij})$ se note plus simplement $-A$.

Exemple 2.14. — Si l'on considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

alors

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad 3A - B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 13 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.15

Pour toutes matrices A , B et C de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, et pour tous λ et μ réels

— Propriétés de l'addition

- $A + (B + C) = (A + B) + C$,
- $A + B = B + A$,
- $A + 0_{np} = A$,
- $A + (-A) = 0_{np}$.

— Propriétés du produit par un scalaire

- $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) = \mu(\lambda A)$,
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,
- $1A = A$, $0A = 0_{np}$ et $\lambda 0_{np} = 0_{np}$.

Proposition 2.16

Pour toutes matrices A, B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, et pour tout λ réel

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB, \quad {}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA, \quad {}^t({}^tA) = A.$$

Exemple 2.17. — Illustrons cette propriété par un exemple. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux matrices sont de même format 2×3 , il est donc possible de les additionner, d'où

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

En prenant la transposée, on obtient

$${}^tA + {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = {}^t(A+B).$$

De même, en prenant $\lambda = 2$, on a

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix} \text{ donc } {}^t(2A) = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 10 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = 2{}^tA.$$

Enfin, puisque la transposée échange lignes et colonnes, transposer la transposée d'une matrice redonne la matrice :

$${}^t({}^tA) = {}^t \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = A.$$

3. Produit matriciel**3.1. Définitions.** —

3.1.1. *Produit LC d'une matrice-ligne L par une matrice-colonne C .* —